TEORIA DE MATEMATICAS 3 (MA1116)

INTRODUCCION.

Operaciones elementales con renglones:

i.- Multiplicar (o dividir) un renglón por un numero diferente de cero.

ii.- Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

iii.- Intercambiar dos renglones.

NOTACION:

$i. - R_i \to cR_i$, quiere decir "reemplazar el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c".

$ii. - R_j \to R_j + cR_i$, quiere decir "sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c".

$iii. - R_i \leftrightarrow R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j"

VECTORES Y MATRICES.

Def: *Vector renglón de n componentes*: se define a un vector renglón de n componentes como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera: $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$.

Def: *Vector columna de n componentes*: Un vector columna de n componentes conjunto ordenado de n número escritos de la siguiente manera. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Def: *Matriz:* Una matriz A de m x n es un arreglo rectangular de m.n números dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Def: *Igualdad de matrices*: Dos matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}) son iguales si (1) son del mismo tamaño y (2) las componentes correspondientes son iguales.

Def: Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices m x n. entonces la suma de A y B es la matriz m x n, A+B dada por la suma de las componentes de A y B correspondientes.

Def: *Multiplicación de una matriz por un escalar.* Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de m x n y si α es un escalar, entonces la matriz m x n, αA, esta dada por; $\alpha A=(\alpha a_{ij})$ es la matriz al multiplicar cada componente de A por α.

Teorema: Sean A, B y C tres matrices de m x n y sean α y β dos escalares. Entonces:

i.- A+O=A

ii.- 0A=0

iii.- A+B =B+A (ley conmutativa para la suma de matrices)

iv.- (A+B)+C=A+(B+C) (ley asociativa para la suma de matrices)

v.- α(A+B)=αA+αB (ley distributiva para la multiplicación escalar)

vi.- 1A=A

vii.- (α+β)A=αA+βA

PRODUCTO VECTORIAL Y MATRICIAL.

Def: *Producto escalar:* Sean $a = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$ y $b = (b_1 \quad \dots \quad b_n)$ dos vectores. Entonces el producto escalar de a y b, denotado por (a.b) está dado por

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

También se conoce como producto interno o producto punto.

Teorema: Sean a, b y c tres n-vectores y sean α y β dos escalares. Entonces:

i.- a.0=0

ii.- a.b =b.a (ley conmutativa del producto escalar)

iii.- a.(b+c)=a.b+a.c (ley distributiva del producto escalar)

iv.- (α.a).b =α(a.b)

PRODUCTO DE DOS MATRICES:

Def: Sea A=(a_{ij}) una matriz m x n y sea B=(b_{ij}) una matriz n x p. entonces el producto de A y B es una matriz de m x p, C=(c_{ij}) en donde

$$c_{ij} = (renglon\ i\ de\ A).(columna\ j\ de\ B)$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la multiplicación.

Teorema: *Ley asociativa para la multiplicación de matrices*: Sean A=(a_{ij}) una matriz de n x m, B=(b_{ij}) una matriz de m x p y C=(c_{ij}) una matriz de p x q. entonces la ley asociativa

$$A(BC) = (AB)C$$

Teorema: *Leyes distributivas para la multiplicación de matrices*: Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$A(B + C) = AB + AC$$

Y

$$(A + B)C = AC + BC$$

SISTEMAS DE M ECUACIONES CON N INCOGNITAS.

Def: *Sistemas inconsistentes y consistentes*: Se dice que un sistema de ecuaciones lineal es inconsistente si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es consistente.

Def: *Forma escalonada reducida por renglones y pivote.* Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones;

i.- Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii.- El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii.- Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo esta mas hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv.- Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón.

Def: *Forma escalonada por renglones.* Una matriz esta en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones (i) (ii) y (iii) de la definición anterior.

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Sea A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes,

x el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y **b** el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de m x n, y **x** es una matriz de n x 1 el producto matricial Ax es una matriz de m x 1. Entonces se puede escribir

$$Ax = b$$

Teorema: Sea $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ soluciones al sistema no homogéneo (Ax=b). Entonces su diferencia, $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}$, es una solución al sistema homogéneo relacionado (Ax=0).

Teorema: Sea **x** una solución particular al sistema no homogéneo y sea ***y*** otra solución al sistema no homogéneo. Entonces existe una solución h al sistema homogéneo tal que:

$$y = x + h$$

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Def: *Matriz identidad.* La matriz identidad I_n de n x n es una matriz de n x n cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$I_n = (b_{ij}) \quad donde \quad b_{ij} \begin{cases} 1 \; si & i = j \\ 0 \; si & i \neq j \end{cases}$$

Teorema: Sea A una matriz cuadrada de n x n. entonces:

$AI_n = I_nA = A$ conmuta con toda matriz n x n.

Def: *La inversa de una matriz.* Sean A y B dos matrices de n x n. suponga que AB=BA=I. entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene $AA^{-1}= A^{-1}A=I$. Si A tiene inversa, entonces se dice que A es invertible.

Teorema: Sean A y B dos matrices invertibles de n x n. Entonces AB es invertible y;

$$(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Def: SI A ES INVERTIBLE, EL SISTEMA Ax=b TIENE UNA SOLUCION UNICA Y ES $x=A^{-1}b$.

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Paso 1: Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$

Paso 2: Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz de A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3: Se decide si A es invertible:

a.- Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b.- Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Teorema: Sea A una matriz n x n. entonces:

i.- A es invertible si y solo si detA≠0.

ii.- Si det≠0, entonces:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} Adjunta\ (A)}$$

Def: *Matrices equivalentes por renglones.* Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son equivalentes por renglones.

Teorema RESUMEN: Sea A una matriz de n x n. Entonces las seis afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

i.- A es invertible.

ii.- La única solución al sistema homogéneo Ax=0 es la solución trivial.

iii.- El sistema Ax=b tiene una solución única para cada n-vector b.

iv.- A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n de n x n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v.- La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vi.- det$A\neq 0$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ.

Def: *Transpuesta.* Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de m x n. Entonces la transpuesta de A, que se escribe A^t es la matriz de n x m obtenida al intercambiar los renglones por las columnas de A. De otra forma $A^t=(a_{ji})$

Teorema: Suponga que $A=(a_{ij})$ es una matriz de n x m y $B=(b_{ij})$ es una matriz de m x p. Entonces:

i.- $(A^t)^t = A$

ii.- $(AB)^t = B^tA^t$

iii.- Si A y B son de n x m, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$

iv.- Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Def: Matriz simétrica: La matriz (cuadrada) A de n x n se llama simétrica si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A.

DETERMINANTES:

Def: *Menor,* Sea A una matriz de n x n y sea M_{ij} la matriz de (n-1)x(n-1) obtenida de A eliminando el renglón i y la columna j. Entonces M_{ij} se llama menor ij de A.

Def: *Cofactor.* Sea A una matriz de n x n. El cofactor ij de A, denotado A_{ij}, esta dado por. $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

Def: *Determinante n x n*: Sea A una matriz de n x n. Entonces el determinante de A, denotado por det A o $|A|$ esta dado por

$$detA = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

Esto se le conoce como la expansión por cofactores.

Def: Matriz Triangular. Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** si todas sus componentes debajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se llama **diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal principal son cero.

Teorema: Sea A=(a_{ij}) una matriz de n x n triangular superior o inferior. Entonces

$$detA = a_{11}.a_{22}\dots a_{nn}$$

Teorema: Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y solo si detT≠0.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

Teorema: Sean A y B dos matrices de n x n. Entonces

$$detAB = detA.detB$$

Teorema: $\det(A^t) = \det(A)$

Teorema BASICO.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz de n x n. Entonces.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad para\ i = 1,2,\dots,n$$

Es decir, se puede calcular determinante A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A. Mas aun,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad para\ j = 1,2,\dots,n$$

Se puede calcular determinante de A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A.

Teorema: Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces det A=0

Teorema: Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces detA se multiplica por C.

Teorema: El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar det(A) por −1.

Teorema: Si se tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det(A)=0.

Teorema: Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces det(A)=0.

Teorema: Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

DETERMINANTES E INVERSAS.

Teorema: Si A es invertible, entonces det(A)≠0 y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Def: *La Adjunta.* Sea A una matriz de n x n y sea B, dada por

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz de sus cofactores. Entonces la adjunta de A, escrito adj(A), es la transpuesta de la matriz B de n x n, es decir,

$$adj(A) = B^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea A una matriz n x n. Entonces A es invertible si y solo si det(A)≠0. Si det(A)≠0, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj\ (A)$$